

SUMARIO

E apresentado um método de análise da simulação dum sistema. Trata-se de uma técnica relativamente recente a qual foi apresentada em 1974 no Journal of ACM por M. Crane e D. Iglehart.

Esta técnica permite abordar questões como a duração da simulação e a avaliação dum intervalo de confiança para uma função arbitrária das variáveis de saída do processo estocástico.

Ao avaliar através de simulação o grau de desempenho (performance evaluation) de sistemas 'de tratamento, armazenamento e transmissão de informação deparamos com processos que tipicamente tem comportamento regenerativo...

A área de aplicação da técnica será delimitada.

O MÉTODO REGENERATIVO DE SIMULAÇÃO

INTRODUÇÃO

Dum modo geral podemos dizer que a simulação é uma experiência com um modelo abstracto, através da qual se escolhem dados estatísticos sobre o sistema no decorrer do tempo. Os dados referidos serão obviamente tratados segundo técnicas estatísticas apropriadas.

E sabido que os programas de simulação são em geral caros em termos de processamento de máquina. Assim suponhamos que dispomos dum modelo e pretendemos com o mínimo de esforço humano e de tempo de máquina obter o máximo de informação possível. Dum modo geral este modelo permitiria avaliar factores qualitativos e quantitativos. Assim suponhamos que desejamos avaliar um certo tipo de variáveis de saída de modelo para níveis quantitativos e cada um destes com n níveis qualitativos $1=1, 2, \dots, m$. O número de execuções é

n
 $E = H \cdot n$

[...]

pode rapidamente tornar-se muito grande. E claro que é necessário ser-se criterioso de modo a fazer uma avaliação correcta de quais os factores a estudar de forma que se obtenha informação suficiente para o fim em vista. No entanto torna-se óbvio que o problema do custo duma simulação, a optimização de cada execução etc... são problemas reais os quais devem ser abordados.

Neste contexto o método regenerativo de simulação é uma técnica de análise das simulações através da qual é possível abordar questões como a duração de simulação e do cálculo de intervalos de confiança duma função qualquer das variáveis de saída do processo de simulação. Desta forma com a utilização desta técnica é possível optimizar os custos de simulação.

2- PROCESSOS REGENERATIVOS

2.1- INTRODUÇÃO

No entanto esta técnica não é geral na medida em que é aplicável apenas a uma certa classe de processos, que apesar de tudo decorrem com muita frequência na área de avaliação do grau de desempenho (performance evaluation) de sistemas de tratamento e transmissão de informação.

Veja-se para começar como análise operacional vê a realidade que se passa a descrever. Afirma-se aí através do princípio do equilíbrio do fluxo de clientes (job flow balance), que ao medir o desempenho dum sistema, é sempre possível escolher um intervalo de tempo T para observação do mesmo, tal que no início o sistema está vazio e após o escoamento de T unidades de todo tipo o sistema volta a estar vazio (o número de trabalhos que saíram é igual ao dos que entraram) (2). É possível que o ponto de vista da análise operacional encerra em si mais potencialidades, mas é em si uma forma diferente de ver a mesma realidade. O intervalo de tempo Y é delimitado por dois instantes que são tipicamente momentos de regeneração. Dum modo geral diremos que um processo regenerativo é caracterizado por existir uma sequência crescente de tempos B_1 (a) $0 < B_1 < B_2 \dots$ chamados tempos de regeneração tais que entre quaisquer dois instantes B_1 e B_1+1 as variáveis de saída do processo são Independentes e identicamente distribuídas (11d) relativamente àquelas que resultarem entre quaisquer outros dois instantes de regeneração consecutivos. Uma situação típica que satisfaz a hipótese de regeneração será a que corresponde a entrada do sistema num certo estado que ao ser atingido significa que o sistema prosseguir; no seu comportamento futuro independentemente da sua história anterior. Exemplo disto será o momento em que a unidade de serviço fica Inactiva e a fila está vazia, num sistema de fila de espera + unidade de serviço.

2.2- RESULTADOS FUNDAMENTAIS

Seja $X(t)$ a variável aleatória de saída do processo simulado e seja $0_k = b_{k+1} - b_k$ ($E(0_k) < \mu$) e seja

$$y_k = \int_0^{b_{k+1}} f(X(t)) dt$$

0_k

em que f é uma função real qualquer.

Assim (3) segue-se que

Teorema 1: A sucessão $\{y_k, a_k\}$ ($k \geq 0$) é formada por vectores aleatórios

Teorema 2: se $E\{f(x)\} < \mu$ então $E\{f(X)\} = E(y_1)/E(a_1)$

De acordo com o teorema 2, o objectivo do método é o cálculo de $E(Y_1)$ e $E(a_1)$. Como exemplo considerem-se as seguintes situações (4):

(a) Suponhamos que estamos interessados na probabilidade de encontrar um servidor Inactivo na unidade de serviço de um sistema de filas de espera.

Seja X a variável aleatória com o seguinte significado:

$X=1$ se o servidor está inactivo; $X=0$ se o servidor está ocupado.

Seja ainda $f(X)=X$. Obviamente $E(f(x(t)))$ = probabilidade de o servidor estar inactivo. y_k é o período de tempo que o servidor está inactivo durante o k ésimo ciclo e até à duração do ciclo.

(b) Suponhamos agora que estamos interessados em estimar o número médio de clientes na fila. Seja X o número de clientes na fila no instante t e $f(Y)=X$.

Então y_k é a quantidade de clientes segundo na fila durante o ciclo k e 0_k a sua duração. Obviamente $E(f(x))$ - valor médio do número de clientes na fila.

2.3 - ANALOGIA EM TERMOS DE VARIÁVEIS DISCRETAS

Seria possível considerar que a sucessão de B_k corresponde a números de ordem de chegada de clientes, em vez de tempos. Nesse caso os clientes b_k seriam os felizardos que, ao chegar, encontravam o servidor disponível. Neste caso:

B_{k+1}
 $ok = b_{k+1} - b_k \quad ak = dt$
 b_k

será o número de clientes que entram para o sistema entre a chegada de dois felizardos consecutivos. y_k neste caso deverá ser interpretado como a soma dos clientes que verificarem positivamente a propriedade em estudo descrita por uma adequada definição da função f .

Os teoremas 1 e 2 continuam válidos nesta situação.

Consideremos os seguintes exemplos:

(a) Suponhamos que desejamos calcular o tempo médio de espera dos clientes no mesmo sistema de fila de espera.

Seja y_k a soma dos tempos de espera dos clientes do ciclo K e o ak o número de clientes atendidos nesse ciclo.

Então $E(f(x)) = E(a_1)$ é o valor médio do tempo de espera.

(b) Suponhamos que desejamos calcular a probabilidade de um cliente ter de esperar mais de 5 unidades de tempo. Seja X o tempo de espera no Sistema.

Seja:

$f(X) = 0$ se $X < 5$

$f(x) = 1$ se $X > 5$

Neste caso será o número de clientes que esperam mais de 5 unidades de tempo no ciclo K e ak será como de costume o número total dos que passaram no ciclo K .

$E(f(x)) =$ probabilidade em questão.

BREVE COMPARAÇÃO COM OUTROS MÉTODOS

Tradicionalmente a simulação tem consistido numa experiência em que se colecta um número levado de valores procedendo-se de seguida a sua análise. Esta análise envolvia nomeadamente a não consideração dos valores que supostamente tivessem sido colhidos antes do sistema atingir o funcionamento em regime estacionário e por outro lado também o cálculo das autovariâncias, visto que dum modo geral os resultados produzidos durante o decurso da simulação não são independentes estando em geral positivamente correlacionados. Este procedimento podia envolver nomeadamente o armazenamento de grandes volumes de dados.

Os chamados métodos indirectos de análise de resultados foram introduzidos como forma de obviar a alguns destes inconvenientes. O chamado método das réplicas nomeadamente sugere que para obtenção dum certo resultado se faça um certo numero de execuções utilizando sementes diferentes nos geradores de variáveis aleatórias. Os k valores assim obtidos são independentes e o calculo da média e dum intervalo de confiança utilizando a distribuição t ou normal a trivial.

No entanto neste método criada uma das k execuções é necessário deitar fora as observações do regime transiente.

Uma forma mais ou menos directa de obviar a este problema seria fazer uma única execução de extensão maior e deitar fora apenas as observações dum regime transiente e não k vezes isso. Esta execução seria depois dividida em k blocos sendo cada uma dessas subexecuções tratada como uma execução do método das replicas; Obviamente cada uma dessas subexecuções deverá ter extensão adequada e se assim não sucedesse teríamos caído no caso da análise directa em que necessitamos ter em conta as autocovariâncias para estimar a variância da amostra.

Face a este panorama verificamos que o método regenerativo, se puder ser aplicado, evita o problema do regime transiente do funcionamento do modelo e fornece directamente variáveis aleatórias iid o que vai simplificar o nosso trabalho de análise. Igualmente a vantagem de poder estimar directamente $E\{f(x(t))\}$ é de realçar.

3 - APLICAÇÃO DO MÉTODO

3.1- ESTIMAÇÃO DE $E(f(x))$

consideremos que possuímos um modelo que produziu uma sequencia de valores $(y_1, a_1), \dots, (Y_n, 0_n)$ a partir de n ciclos do funcionamento dum processo regenerativo. Um estimador de $r=E(f(X))$ é geralmente aceite é

por outro lado

Vejamos agora em seguida como calcular o intervalo de confiança i -a

de nível $1-\alpha$ daquele valor r .

3.2- ESTIMAÇÃO DE $I=\alpha$

Definamos uma variável aleatória $D_i = y_i - r\alpha$ a qual obviamente tem valor médio nulo. Podemos aceitar para estimador da variância

Através do teorema do limite central temos que

Converge para uma variável normal quando $n \rightarrow \infty$. Assim substituindo D_1 obtemos

Aproximando pelo estimador atrás visto podemos chegar a

Donde

Ou seja

Com um valor prefixado (por exemplo 0.1). Nesse caso as Simulações acabariam quando n , satisfazendo à condição de convergência já referida, verifique pela primeira vez que

Com n suficientemente grande para garantir a convergência normal atrás referida.

Incluindo no modelo formulas para o cálculo de $Z_{1-0,2}$ (veja-se (6)) será possível construir um programa em que os níveis de confiança são dados em tempo de execução, ou vice-versa face a um dado intervalo pré-estabelecido (p.ex. $r \pm 7$) calcular o nível de confiança do resultado.

Neste caso seria

3.3- CRITÉRIO PARA FINALIZAR A SIMULAÇÃO

Podemos utilizar o método em conjunção com um critério que faça parar a simulação após a obtenção dum número suficiente de ciclos. O critério poderá ser por exemplo que o programa parasse quando fosse:

Conclusões

Foi apresentada uma técnica de simulação aplicável a processos regenerativos a qual permite calcular $E\{f(x(t))\}$ sendo $f(x)$ uma função real:
é uma variável aleatória ou um vector aleatório.

Esta técnica compara-se favoravelmente com outros métodos tradicionais de efectuar a colheita e análise de dados em Simulação nomeadamente por não precisar de avaliação da duração da fase transiente e por outro lado por produzir directamente variáveis aleatórias Independentemente e identicamente distribuídas.

AGRADECIMENTO

Desejo manifestar ao Professor Alexandre Cerveira o maior apreço pelo encorajamento e apoio prestado à elaboração deste artigo